14

TEMA 3: ondas planas:

* Ec. onda: $u(x,y,z,t) = u_0(x,y,z)\cos(\omega t + \varphi(x,y,z))$
$\hookrightarrow \omega = 2\pi f$

* Fórmula de Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$

[ponemos la primera en función de la segunda]

$c e^{j\theta} = \underbrace{c\cdot\cos\theta}_{\text{Real}} + j\underbrace{c\,\text{sen}\,\theta}_{\text{Imaginaria}} \Big|_{\theta = \omega t + \varphi}$

* $u(x,y,z,t) = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, e^{j(\omega t + \varphi(x,y,z))}\}$

* $u(x,y,z,t) = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi(x,y,z)}\}$

FASOR: $\vec{\mathcal{U}}(x,y,z,t) = u_0(x,y,z)\, e^{j\varphi(x,y,t)}$ → NUNCA en un fasor aparece el tiempo $e^{j\omega t}$

* Derivación:

$u(x,y,z) = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, e^{j(\omega t + \varphi)}\}$

$\frac{\partial u_0}{\partial t} = j\omega\, u_0(x,y,z)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, j\omega\, e^{j(\omega t - \varphi)}\}$

* Integración:

$u(x,y,z) = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, e^{j(\omega t + \varphi)}\}$

$\int u_0\, dt = \frac{1}{j\omega} u_0$

$\int u\, dt = \text{Re}\{u_0(x,y,z)\, \frac{1}{j\omega}\, e^{j(\omega t - \varphi)}\}$

FORMA ABREVIADA:

$\vec{\mathcal{U}}(x,y,z,t) = u_0(x,y,z)\, e^{j\varphi(x,y,z)}$

$\boxed{\mathcal{U} = u_0 e^{j\varphi}}$

15

Ondas planas en el vacío:

* Aproximamos el resultado de la ecuación de onda por medio:

1) Se propaga según el eje z:

(*) $E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - K_0 z)$ [+z]

(**) $E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t + K_0 z)$ [-z]

(*) $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - K_0 z)\hat{x}$; $\vec{\mathbb{E}}(z) = E_0 e^{-jK_0 z}\hat{x}$

(**) $\underbrace{\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t + K_0 z)\hat{x}}_{\text{FORMA INSTANTÁNEA}}$; $\underbrace{\vec{\mathbb{E}}(z) = E_0 e^{jK_0 z}\hat{x}}_{\text{FORMA FASORIAL}}$

$K_0 = \beta = \frac{\omega}{V_p} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $V_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$

↳ constante de fase ó número de onda

↳ $3 \cdot 10^8$ m/s (en el vacío)

* forma de calcular el campo $\vec{H}$:

- $\nabla \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ → en forma fasorial:

$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -j\omega\mu_0\vec{\mathbb{H}}$

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbb{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial z}\hat{y} = -j\omega\mu_0\vec{\mathbb{H}}$$

$\frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu_0\mathbb{H}_y$; $\mathbb{E}_x = E_0 e^{-jK_0 z}$ (+z)

$\frac{\partial \mathbb{E}_x}{\partial z} = E_0 e^{-jK_0 z}(-jK_0)$

$E_0 e^{-jK_0 z}(\cancel{-j}K_0) = \cancel{-j}\omega\mu_0\mathbb{H}_y$

$\mathbb{H}_y = \frac{K_0}{\omega\mu_0} E_0 e^{-jK_0 z}$; $\frac{K_0}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$\mathbb{H}_y = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0} E_0 e^{-jK_0 z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jK_0 z}$

$\mathbb{H} = \frac{1}{\eta_0} E_0 e^{-jK_0 z}$; $\mathbb{H}_y = \frac{1}{\eta_0}\mathbb{E}_x$

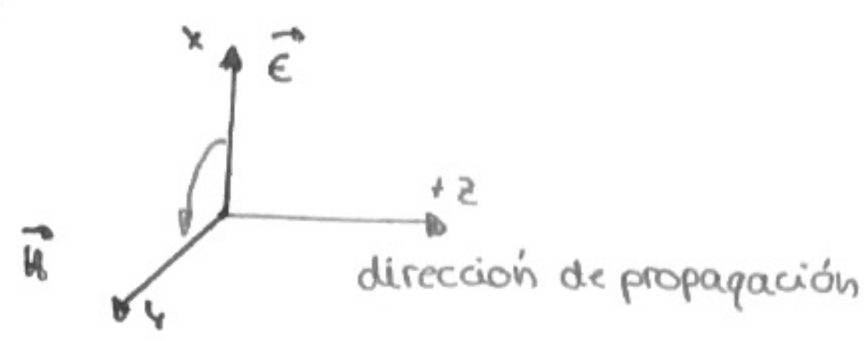
Se define $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ Impedancia intrínseca en el vacío $\eta_0 = 120\pi\ \Omega$

* forma fasorial:

$\vec{\mathbb{H}} = \frac{1}{\eta_0}\mathbb{E}_x\hat{y}$

* forma instantánea

$H_0 = \frac{E_0}{\dots}$



Ondas planas en medios con pérdidas

Sean ε_r y μ_r las características del medio:

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$; $\mu = \mu_0 \mu_r$

* $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - Kz)\,\hat{x}$ $\qquad H_0 = \dfrac{E_0}{\eta}$
* $\vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - Kz)\,\hat{y}$

$K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$; $K = K_0\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

$\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0\sqrt{\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

* Como estamos en un medio con pérdidas:

$\boxed{\sigma \neq 0}$

- Si $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \lll 1 \Rightarrow$ Aislante
- si $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ggg 1 \Rightarrow$ Conductor

$\omega = 2\pi f$, la f influye

* También tendremos: $\gamma = \alpha + j\beta$
  - α = cte de atenuación [Np/m]
  - β = cte de fase [rad/m]

* $\vec{E}(z) = E_0 \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{atenuación}} e^{-j\beta z}\,\hat{x} = E_0\, e^{-\overbrace{(\alpha + j\beta)}^{\gamma} z}\,\hat{x}$

* La onda disminuye su amplitud según avanza z

* $\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - j\beta z)\,\hat{x}$
* $\vec{H}(z) = H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\,\hat{y} = H_0 e^{-\overbrace{(\alpha + j\beta)}^{\gamma} z}\,\hat{y}$
* $\vec{H}(z,t) = H_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - j\beta z)\,\hat{y}$; $H_0 = \dfrac{E_0}{\eta}$

- Si $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} <<< 1$ (aislante) $\Rightarrow \alpha \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; $\beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$; $\eta \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; $v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

La velocidad de propagació

- si $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >>> 1$ (conductor) $\Rightarrow \alpha = \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$; $\eta \simeq (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$

Planteamiento general

El campo eléctrico está en cualquier dirección del espacio.

Definimos: $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$; el vector de propagación de la onda:

$$\vec{K} = K_x\hat{x} + K_y\hat{y} + K_z\hat{z} \rightarrow \text{vector propagación}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \rightarrow \text{vector posición}$$

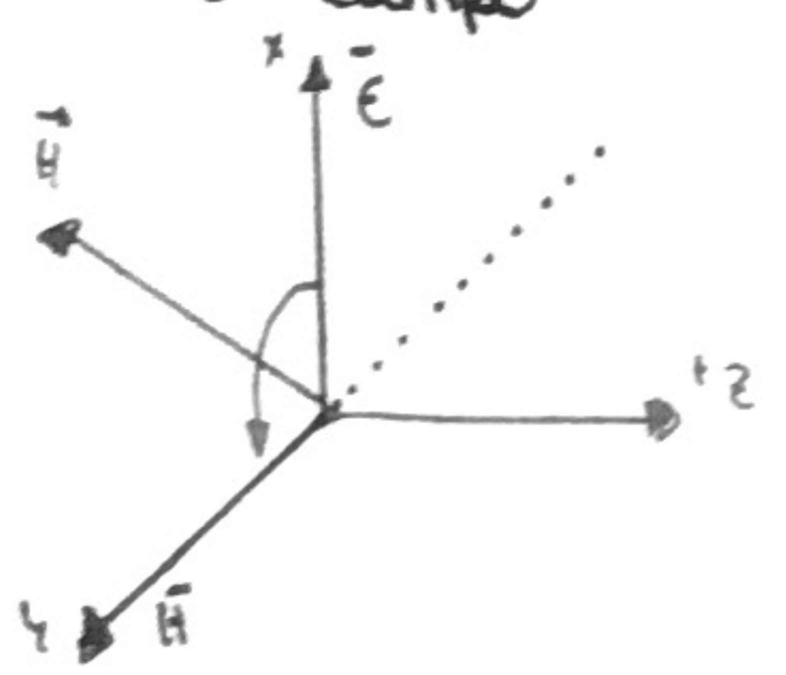
$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{K}\cdot\vec{r}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}} = E_0 \cos(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\eta}(\vec{K}\times\vec{E}) ; \vec{E} = -\eta(\vec{K}\times\vec{H})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}(\vec{E}\times\vec{K}) ; \vec{E} = \eta(\vec{H}\times\vec{K})$$

Ejercicio 3. 9/1/18 $\rightarrow$ Se propaga en el aire; dirección de propagación $+z$; $H_0 = \frac{1}{\pi}$ A/m

el campo $\hat{H}$ varía en $(\hat{x}+\hat{y})$



Con $f = 100$ MHz

a) Expresión fasorial de $\vec{E}$.

$\vec{E}(z) = E_0 e^{-j\beta z}\,\hat{u}$; $\hat{u}$ vector unitario en la dirección de $\vec{E}$

$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0}$; $\eta_0 = 120\pi\,\Omega$ (vacío ≡ aire)

$E_0 = \eta_0 H_0 = 120\pi\,\frac{1}{\pi} = 120$ V/m

$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi 10^8}{3\cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3}$ rad/s

$\vec{E}(z) = 120\,e$ ... $\frac{}{\sqrt{2}}$ V/m

18 b) Al estar en un medio sin pérdidas:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0}\hat{z} = \frac{120^2}{2\cdot 120\pi}\hat{z} = \frac{60}{\pi}\hat{z}\ \frac{W}{m^2}$$

$$E_0 = \eta_0 H_0;\ \langle \vec{S} \rangle = \frac{\eta_0^{\cancel{2}} H_0^2}{2\cancel{\eta_0}}\hat{z}$$

c) $\vec{E}(x,y,z,t) = \frac{2.1}{\pi}\operatorname{sen}(10^8 t - 0.7x - 1.2y - 2.7z)$ V/m

La primera onda se propaga según $+z \Rightarrow \hat{z}$

$$\vec{E} = \frac{2.1}{\pi}\operatorname{sen}(10^8 t - \vec{k}\cdot\vec{r})\ V/m$$

$\vec{k} = 0.7\hat{x} + 1.2\hat{y} + 2.7\hat{z}$ | $\vec{k}\cdot\vec{r} = 0.7x + 1.2y + 2.7z$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

El ángulo que formarán las dos direcciones de propagación será:

$$\hat{z}\cdot\vec{k} = |\hat{z}||\vec{k}|\cos(\alpha)$$

$$|\hat{z}| = 1;\ |\vec{k}| = \sqrt{(0.7)^2 + (1.2)^2 + (2.7)^2} = 3.036$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\hat{z}\cdot\vec{k}}{1\cdot 3.036} = \frac{2.7}{3.036};\ \boxed{\alpha = 27.23^\circ}$$

Una onda igual que la anterior se propaga por el medio 1 ($z<0$), el vacío, según $+\hat{x}$.

Esta onda incide en el ~~vacío~~ medio 2 ($z>0$) caracterizado $\varepsilon = 4\varepsilon_0$

19 * Si el medio 1 es un aislante o dieléctrico ($\sigma_1 = 0$) y el medio 2 tiene

19

Vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \; ; \; [\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$$

Valor promedio:

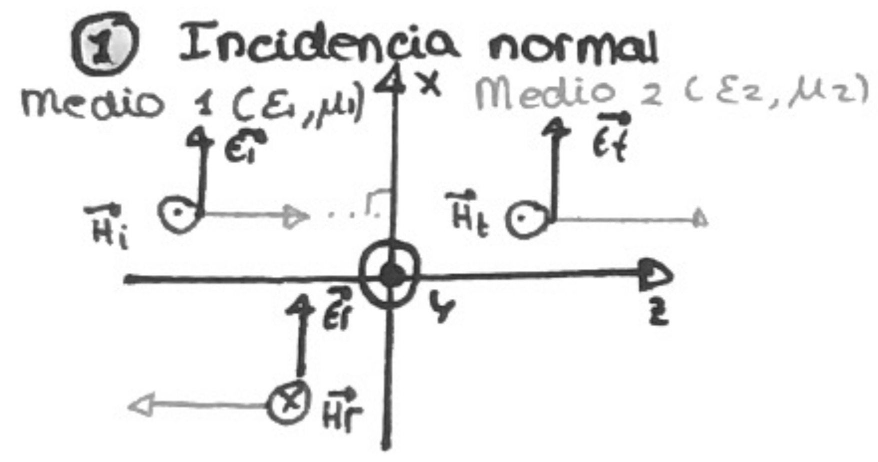
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right]$$

$\vec{H}^*$ es el complejo conjugado de $\vec{H}$.

$\vec{S}$ es un vector en la dirección de propagación de la onda.

Ondas Planas. Cambio de medio

1 Incidencia normal



$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

$$H_{oi} - H_{or} = H_{ot} \; (*)$$

Recordando: $H_0 = \dfrac{E_0}{\eta}$

$$(*) \quad \frac{E_{oi}}{\eta_1} - \frac{E_{or}}{\eta_1} = \frac{E_{ot}}{\eta_2}$$ y con $E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$; obtenemos:

$$\boxed{E_{or} = E_{oi} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \qquad \boxed{E_{ot} = E_{oi} \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$ → Coeficiente de reflexión

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ → Coeficiente de transmisión

$$\tau = 1 + \Gamma \; ; \; -1 \leq \Gamma \leq 1$$

Medio 1: $\vec{E}_i = E_{oi} e^{-\gamma_1 z} \hat{x}$; $\vec{H}_i = \dfrac{E_{oi}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{y}$

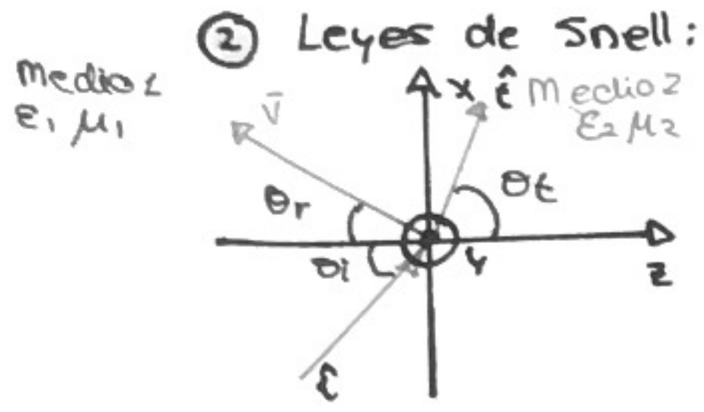
$\vec{E}_r = E_{oi} \Gamma e^{\gamma_1 z} \hat{x}$; $\vec{H}_r = \dfrac{E_{oi} \Gamma}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} (-\hat{y})$

Medio 2: $\vec{E} = E_{oi} \tau e^{-\gamma_2 z} \hat{x}$; $\vec{H}_t = \dfrac{E_{oi} \tau}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \hat{y}$

* Si el medio 1 es un aislante o dieléctrico ($\sigma_1 = 0$) y el medio 2 tiene un alta conductividad.

$(\sigma_2 \to \infty) \Rightarrow \Gamma = -1$ y $\tau = 0$ [Todo se refleja y nada se transmite]

② Leyes de Snell:



1^{era} ley: $\mathrm{sen}(\theta_i) = \mathrm{sen}(\theta_r) \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$

2^{da} ley: $\gamma_1 \mathrm{sen}(\theta_i) = \gamma_2 \mathrm{sen}(\theta_t)$

* Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\gamma_1 = j\beta_1$; $\gamma_2 = j\beta_2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

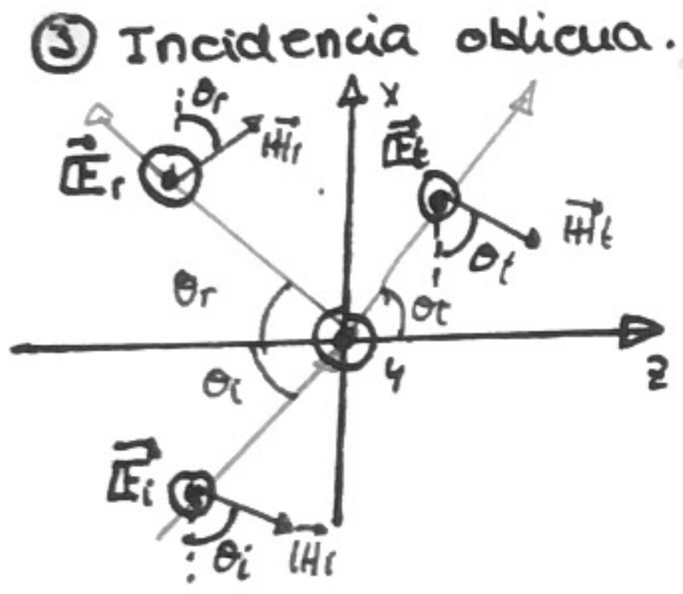
$j\beta_1 \mathrm{sen}(\theta_i) = j\beta_2 \mathrm{sen}(\theta_t) \qquad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$; $\omega = 2\pi f$

$\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\mathrm{sen}\,\theta_i = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\mathrm{sen}(\theta_t)$

$\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{sen}\,\theta_i = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{sen}\,\theta_t$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}\,\mathrm{sen}(\theta_i) = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}\,\mathrm{sen}(\theta_t)}$$

③ Incidencia oblicua. Caso I: el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia.



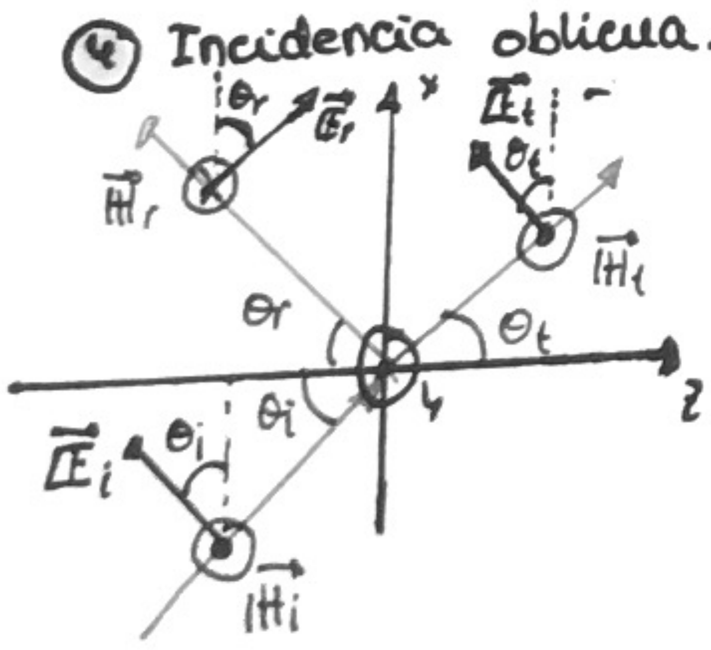
Ecuaciones de Fresnel:

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos(\theta_i)}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$E_{or} = E_{oi}\Gamma_\perp$; $E_{ot} = E_{oi}\tau_\perp$

④ Incidencia oblicua. Caso II: el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.



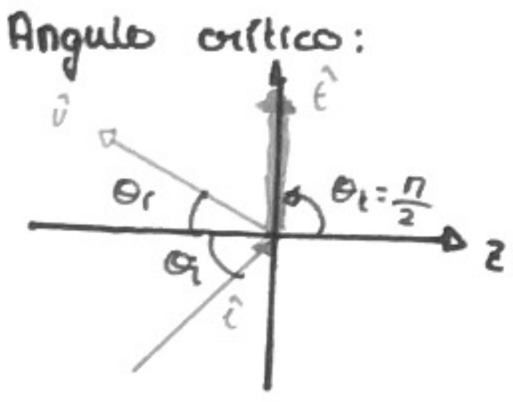
Ecuaciones de Fresnel:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

5 Ángulo crítico:



Suponemos que medio 1 y medio 2 $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

2^{da} ley de Snell $\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_{r1}}\,\text{sen}(\theta_i) = \sqrt{\varepsilon_{r2}}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta_i = \text{arc sen}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\right) \quad \varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$

* Toda la potencia se transmite por la superficie de separación.

6 Ángulo de Brewster: el ángulo en el cual se anula la componente paralela de la onda reflejada.

$\Gamma_{\parallel} = 0 \Rightarrow \eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i = 0$

$\theta_B = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\right)$ suponemos que $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

Ejercicio 2 9/1/2019

$\vec{E}(y,z,t) = \frac{1}{60\pi}\cos(\omega t + 2\sqrt{3}\,x - 5z)\,\hat{y}$ V/m en el vacío (ε_0, μ_0)

a) $\vec{E}(y,z,t) = E_0 \cos(\omega t - \boxed{\vec{k}\cdot\vec{r}})\,\hat{y}$ V/m

$\vec{E}(y,z,t) = \frac{1}{60\pi}\cos(\omega t - \boxed{(-2\sqrt{3}x + 5z)})\,\hat{y}$ V/m

$\vec{k}\cdot\vec{r} = -2\sqrt{3}\,x + 5z \qquad k_x = -2\sqrt{3}$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \qquad k_y = 0$

$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \qquad k_z = 5$

$\vec{k} = -2\sqrt{3}\,\hat{x} + 5\hat{z}$ (dirección de propagación (de k)) → vector unitario ⇒ $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$; $\|\vec{k}\| = 6.0828$

$\quad \hookrightarrow \% 6.0828 \quad \hookrightarrow \% 6.0828$

$\hat{k} = -0.57\,\hat{x} + 0.822\,\hat{z}$

b) $k = \frac{\omega}{c}$; $c = 3.10^8$ m/s ; $|\vec{k}| = 6.0828$

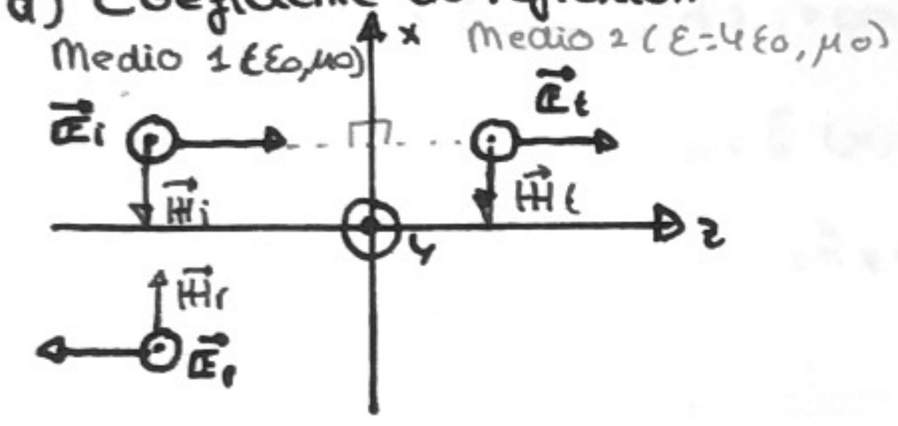
$\omega = k \cdot c = 6.0828 \cdot 3.10^8 = 1.825 \cdot 10^9\ s^{-1}$

c) $\underbrace{\vec{E} = \frac{1}{60\pi} e^{(2\sqrt{3}x - 5z)}}_{\text{IGUAL}}\ \hat{y} = \underbrace{\frac{1}{60\pi} e^{-(-2\sqrt{3},5)\cdot\vec{r}}\ \hat{y}}_{\text{IGUAL}}$ V/m

21

El enunciado sigue, es el de la página 18 (una onda igual...)

d) Coeficiente de reflexión



Incidencia normal $\Rightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

$\eta_1 = 120\pi\,\Omega$

$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4}}\,120\pi = 60\pi\,\Omega$

$\Gamma = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = \frac{-60\cancel{\pi}}{180\cancel{\pi}} = -1/3$

e) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right]$; calculamos la densidad media de potencia incidente:

$\vec{E}_i = \frac{1}{60\pi} e^{-\beta_1 z j}\,\hat{y}$; $\vec{H}_i = \frac{1/60\pi}{\eta_0} e^{-\beta_1 z j}\,(-\hat{x})$

$\vec{H}_i^* = \frac{1/60\pi}{\eta_0} e^{+\beta_1 z j}\,(-\hat{x})$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{60\pi} e^{-\beta_1 z j}\,\frac{1/60\pi}{120\pi}\,e^{+\beta_1 z j}\right]\hat{z}\,\frac{W}{m^2}$

$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(60\pi)^2}\,\frac{1}{120\pi} = 3.73 \cdot 10^{-8}\,\hat{z}\,\frac{W}{m^2}$

$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2 \cdot 60\pi}{120\pi + 60\pi} = \frac{120\cancel{\pi}}{180\cancel{\pi}} = \frac{2}{3}$

$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{2}{3}\langle \vec{S}_i \rangle$